

TP Weibull

1. Introduction

Un des plus importants problèmes rencontrés lors de la conception de pièces de structure est la connaissance de la contrainte maximale pouvant être tolérée par ces dernières sans qu'elles ne rompent subitement. Pour cela, différents essais standardisés ont été mis en place pour connaître cette grandeur, comme pour l'essai de traction pour la rupture en traction uniaxiale. Pour les matériaux fragiles, qui cassent par l'amorçage de la propagation d'une fissure qui traverse la pièce sans s'arrêter, les essais tels l'essai de traction perdent de leur simplicité car ils ne donnent pas pour résultat une valeur unique : deux barreaux du même matériau fragile auront en général des contraintes à rupture différentes (parfois d'un ordre de grandeur), même si tout (le matériau, la préparation du barreau et son essai) est identique d'un essai à l'autre.

La raison en est que la rupture d'un matériau fragile commence généralement à un défaut présent en son sein ou à sa surface : microfissure, précipité, inclusion, pore... Or ces défauts, qui peuvent être introduits lors de la fabrication de la pièce ou survenir plus tard (par exemple une microfissure peut se développer dans une pièce en verre si sa surface a été rayée lors de la manutention), varient d'un échantillon à un autre et sont tels que leurs caractéristiques (taille, forme, nature) influent la contrainte à laquelle la fissuration catastrophique de la pièce est amorcée. Pour des métaux ou des polymères ductiles, la présence de ces petits défauts n'est souvent pas importante, du moins en ce qui concerne la résistance à la rupture soudaine. Ceci fait que la résistance à rupture des matériaux fragiles est généralement une grandeur statistique, dont la distribution dépend de la distribution des défauts en son sein et de leur interaction avec le champ des contraintes qui les entourent. Du fait que les défauts entraînant la rupture des matériaux fragiles peuvent varier fortement, la distribution des contraintes à rupture n'est alors plus étroite, mais couvre un champ plus large, dont les valeurs caractéristiques dépendent non seulement du matériau et de son histoire, mais de son volume et de la distribution des contraintes en son sein. Celles-ci sont le plus souvent décrites par la distribution dite de Weibull.

Le modèle probabiliste de Weibull

Le modèle de Weibull propose une distribution statistique de la contrainte à rupture d'un matériau dont la rupture est déterminée par l'amorçage de la propagation d'une fissure qui coupera, dès qu'elle se propage, la pièce en deux, cet amorçage étant provoqué par des défauts aux caractéristiques distribuées statistiquement. Cette distribution est nommée $P_F(\sigma)$ (F for failure en anglais) et représente la probabilité de rupture d'un matériau sous l'effet d'une contrainte uniaxiale donnée, *i.e.*, en termes simples, « si la contrainte est X MPa dans un volume V, le matériau a Y% de chances de rompre ». A noter qu'il n'est pas rare de voir des critères probabilistes en industrie, un exemple moins critique que la rupture mécanique étant la maîtrise prévisionnelle des prestations qui utilise la notion de probabilité d'apparition d'une défaillance pour évaluer le risque d'insatisfaction du client.

La probabilité de trouver un défaut donné dans un volume donné de matériau augmente à l'évidence avec ce volume. Deux hypothèses simplificatrices sont proposées :

- Les résistances à la rupture de chaque élément de volume infinitésimaux dV sont modélisées par des variables aléatoires indépendantes, *i.e.* à contrainte donnée chaque dV contient potentiellement des défauts (caractère aléatoire) pouvant dégénérer en une fissure et ces

différents dV n'interagissent pas entre eux (indépendance) rendant l'amorçage de la rupture dans le volume dV purement local. A noter que ce cas est une simplification de la réalité, mais est souvent une bonne approximation.

- Considérons un élément de volume dV contenant des défauts. Ces défauts peuvent être activés ou non selon la contrainte exercée sur dV . Si l'un de ces défauts amorce la propagation d'une fissure, il entraîne avec lui la rupture de toute la pièce. Il s'agit là de la loi du maillon faible : si la rupture survient en un point, on considère que les fonctions mécaniques de la structure entière sont perdues.

Différentes lois de probabilité peuvent être choisies selon les cas, mais la plus utilisée est la loi de Poisson. Il s'agit d'une loi de probabilité discrète dénombrant la survenance d'événements ponctuels. Dans notre cas, les événements sont l'activation d'un défaut dans le matériau. La probabilité P_k de trouver k défauts activés dans un volume V est alors donnée par l'équation :

$$P_k(V) = \frac{(\lambda V)^k}{k!} e^{-\lambda V} \quad (1)$$

Ainsi, selon l'hypothèse du maillon faible présentée précédemment, $k = 0$ correspond à la survie de l'échantillon (aucun défaut n'est activé) et $k \geq 1$ représente sa rupture (au moins un défaut est activé). On peut donc déterminer la probabilité de survie, la probabilité de n'avoir aucun défaut activé :

$$P_{k=0}(V) = e^{-\lambda V} \quad (2)$$

La probabilité de rupture, notée P_F , est donc le complément de la probabilité de survie :

$$P_F = 1 - P_{k=0} = 1 - e^{-\lambda V} \quad (3)$$

Les Eqs. 1 à 3 font intervenir λ , qui est un paramètre représentant la densité d'activation des défauts sous une contrainte σ donnée. Weibull a proposé qu'il soit modélisé par la loi puissance suivante :

$$\lambda = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \quad (4)$$

Ainsi, plus la contrainte σ est grande, plus la densité de défauts activés λ est grande. m , appelé module de Weibull, sert à rendre compte du degré d'inhomogénéité de la densité des défauts dans le matériau, i.e. plus m est petit, plus les défauts sont répartis de manière hétérogène dans le matériau et plus la dispersion des contraintes à rupture observée expérimentalement sera importante. m est toujours positif et peut théoriquement varier de 0 à ∞ . En pratique, il est autour de 100 pour les métaux et alliages, mais tombe à moins de 3 pour des céramiques traditionnelles (briques, poteries). Des céramiques industrielles aux procédés de fabrication beaucoup plus contrôlés et donc à la population de défauts plus restreinte, peuvent atteindre des modules de Weibull plus élevés, entre 5 et 30.

V_0 est un paramètre représentant l'échelle d'étude pour le matériau et σ_0 donne une contrainte moyenne d'activation des défauts du dit matériau. Cependant, V_0 et σ_0 ne sont en réalité pas indépendants l'un de l'autre et peuvent être combinés en un autre paramètre, appelé le facteur d'échelle :

$$\sigma_0 V_0^{1/m} \quad (5)$$

Par conséquent, en combinant l'Eq. 5 avec l'Eq. 3, la probabilité de rupture devient :

$$P_F = 1 - \exp \left[-\frac{V}{V_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (6)$$

Notez que si $\sigma V^{1/m} = \sigma_0 V_0^{1/m}$, la probabilité de rupture est de $1 - e \approx 0.63$. Le facteur d'échelle peut donc être utilisé comme décrivant les combinaisons de volume et contrainte telles qu'il y a une probabilité de 63% que le matériau casse.

2. L'influence du volume et de la contrainte

Comme discuté dans l'introduction, une large pièce de verre est contre-intuitivement plus fragile qu'une fibre du même matériel. Cela est dû à la plus grande probabilité de rencontrer un défaut d'une taille suffisante pour être activé même à des contraintes faibles. Cette propriété est facilement mise en valeur par le critère de Weibull.

Prenons, par exemple, des éprouvettes de composition nominale et de volume V_0 identiques avec une probabilité de rupture P_{F0} de rompre à une contrainte σ_0 (correspondant à un chargement F) en traction. Si une éprouvette, toujours de même composition nominale, mais de volume $V_n = nV_0$ est montée en traction, sa probabilité de rupture P_{Fn} est donc équivalente à la probabilité de rupture de n éprouvettes de volume V_0 montées en série :

$$1 - P_{Fn} = (1 - P_{F0})^n \Leftrightarrow \log(1 - P_{Fn}) = n \log(1 - P_{F0}) \quad (7)$$

Par extension, la probabilité de rupture d'une éprouvette de volume V par comparaison avec une éprouvette de volume V_0 est donc :

$$\log(1 - P_{Fn}) = \frac{V}{V_0} \log(1 - P_{F0}) \quad (8)$$

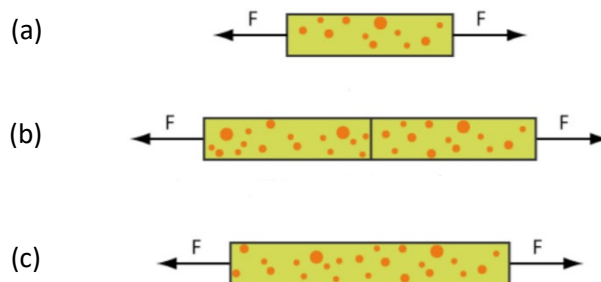


Fig. 1 : Essai de traction sur différents montages d'éprouvettes soumises à une même force F : (a) une éprouvette de volume V_0 , (b) une éprouvette de volume $V_2 = 2 V_0$, équivalente à deux éprouvettes de volume V_0 chacune en série, (c) une éprouvette de volume $V_n = n V_0$. Les points orange représentent schématiquement la répartition des défauts dans les échantillons.

Le raisonnement précédent a été conduit avec une contrainte uniforme, ce qui n'est majoritairement pas le cas dans les conditions d'utilisation réelle d'une pièce. Par exemple, une pièce en flexion sera

soumise à une répartition des contraintes hétérogène, avec des contraintes plus élevées dans certaines zones et, par conséquent, une probabilité d'activation de défauts et donc de rupture plus élevée dans ces mêmes zones à volume égal. Un volume effectif V_{eff} est donc défini comme le volume que devrait avoir une éprouvette du même matériau soumise à un essai de traction uniaxial (contrainte uniforme) pour avoir une probabilité de rupture identique à celle de la pièce considérée, dont le volume est V . Ce volume effectif peut donc être noté comme suit :

$$V_{eff} = V \cdot H \quad (9)$$

avec H , un facteur représentatif de l'hétérogénéité des contraintes. V_{eff} peut être calculé via l'équation 10 :

$$V_{eff} = \int \left(\frac{\langle \sigma \rangle}{\sigma_F} \right)^m dV \quad (10)$$

avec $\langle \sigma \rangle$ la valeur positive de la contrainte et σ_F la contrainte à rupture. $\langle \sigma \rangle / \sigma_F$ est donc la normalisation de la contrainte dans le matériau par rapport à la contrainte à rupture.

En prenant en compte le volume effectif V_{eff} , Eq. 6 devient

$$P_F = 1 - \exp \left[- \frac{V_{eff}}{V_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (11)$$

3. Le montage flexion trois-points

L'essai de traction classiquement utilisé pour les matériaux ductiles (métaux, polymères) se révèle plutôt inadéquat pour les matériaux fragiles, tels que les verres ou céramiques. En effet, la simple action de placer une éprouvette dans les mors d'une machine de traction peut suffire à la fracturer. C'est pourquoi l'essai de flexion trois ou quatre-points est généralement préféré pour ces matériaux.

En appliquant une force dirigée vers le bas au centre d'un barreau de matériau placé dans un montage de flexion trois-points, une seconde force, opposée en direction, se forme à ses extrémités qui sont maintenues en place par deux appuis. La pièce est donc soumise à la fois à des contraintes en compression (moitié inférieure) et en tension (moitié supérieure) et commence donc à fléchir, voir Figs. 2 et 3.

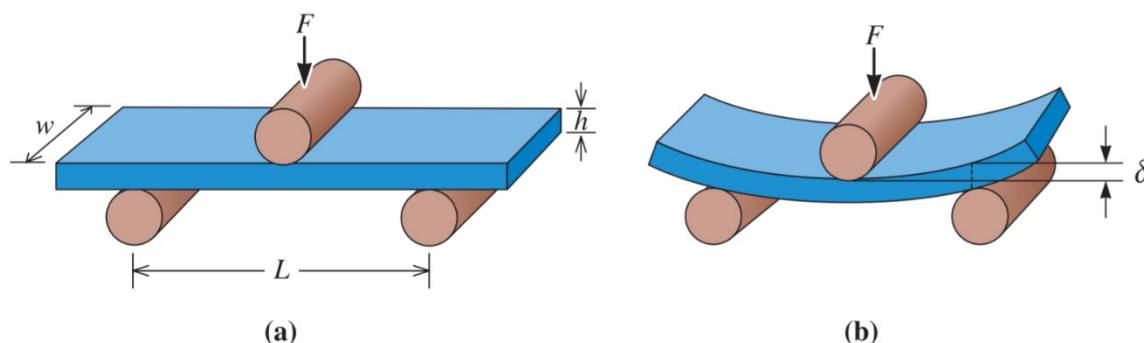


Fig. 2 : Essai de flexion trois points : (a) le montage avant l'application d'une force F , (b) sous l'application d'une force F , le matériau commence à se tordre.

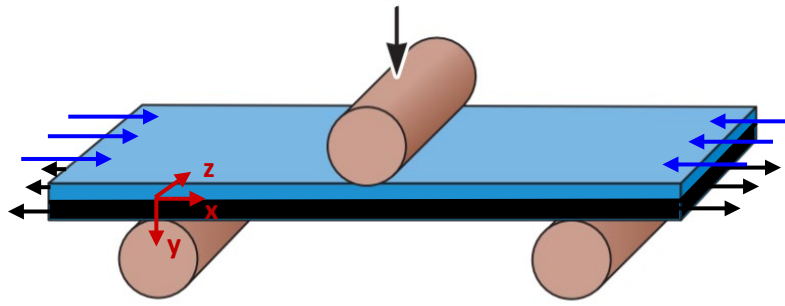


Fig. 3 : Répartition des contraintes exercées sur une pièce dans un montage de flexion trois points. En bleu, les contraintes en compression réparties sur la moitié supérieure. En noir, les contraintes en tension réparties sur la moitié inférieure.

La répartition des contraintes dans le matériau est approximativement comme suit :

$$\sigma(x, y) = \frac{6Fxy}{wh^3} \quad (12)$$

avec F le chargement, w la largeur de l'échantillon, et h sa hauteur. La contrainte ne varie que selon les axes x et y (longueur et hauteur, respectivement, voir Fig. 3), restant constante (avec les hypothèses faites pour arriver à l'équation ci-dessus) le long de l'axe z qui correspond à la largeur de l'échantillon. Comme une fissure qui se formerait dans la moitié supérieure serait rapidement refermée sous l'effet des contraintes en compression, la rupture commence habituellement au centre-bas du matériel où se concentrent majoritairement les forces de tension. Plus précisément, la contrainte maximum pouvant être supportée par l'échantillon est localisée au centre de la zone de tension, i.e. à $L/2$ et $h/2$. Cette contrainte, aussi appelée résistance à la flexion ou module de rupture du matériau est notée σ_F [MPa] et est définie comme suit :

$$\sigma_F = \frac{3FL}{2wh^2} \quad (13)$$

avec F le chargement à rupture et L la distance entre les deux appuis inférieurs. A noter que la courbe obtenue, mesurant la contrainte par rapport à la déviation (δ sur la Fig. 3), est similaire à la courbe classique contrainte/déformation des tests de traction. Ainsi, un module d'élasticité en flexion ou « module de flexion » E_{flexion} peut être calculé par la formule :

$$E_{\text{bend}} = \frac{FL^3}{4wh^3\delta} \quad (14)$$

avec δ la déviation de l'éprouvette quand une force F is appliquée.

Un volume effectif V_{eff} défini dans la section 3 peut donc être défini pour une éprouvette soumise à la flexion trois-points ; le calcul donne :

$$V_{\text{eff}} = V_{\text{ep}} \frac{1}{2(m+1)^2} \quad (15)$$

avec $V_{\text{ep}} = Lhw$, le volume total de l'éprouvette. La démonstration de ce calcul est donnée en annexe.

Il existe également une variation du test de flexion appelé flexion quatre-points, plus adapté à des matériaux contenant une grande quantité de défauts. En effet, comme le moment fléchissant est constant entre les deux appuis supérieurs, la présence d'un défaut sur ce segment augmentera localement la contrainte et deviendra un point de départ pour la fracture.

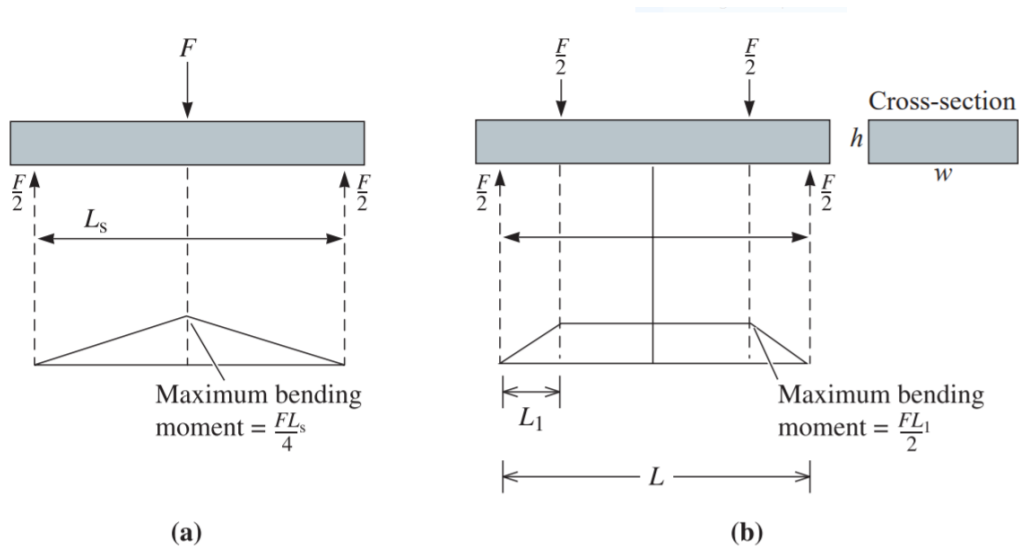


Fig. 4 : Comparaison entre un montage en flexion trois-points (a) et un montage quatre-points (b)

4. La détermination pratique des paramètres de Weibull

Tout d'abord, une série suffisamment importante d'échantillons doit être réalisée. Dans le cadre de ce TP, les matériaux suivants seront testés sur des systèmes manuels de flexion :

Matériau	Nombre de échantillons
PMMA (polyméthacrylate de méthyle)	30

Partie Expérimentale

- Testez la série d'éprouvettes et reportez leurs efforts à rupture individuels dans un tableau Excel
- Calculez les différents modules de rupture σ_F selon l'Eq. 13
- Classez les modules de rupture mesurés dans l'ordre croissant et assignez-leur un numéro, i.e. 1 est le module le plus faible et 30 est le plus élevé.

Calculs des modules de Weibull du PMMA et du PC

La probabilité de rupture, P_F , des éprouvettes peut désormais être calculée. Pour cela, la loi probabiliste suivante est choisie :

$$P_F = \frac{i - 0.5}{N} \quad (17)$$

avec N le nombre total d'éprouvettes testées et i leur numéro assigné.

De plus, dans le cas de la flexion trois-points, la formule générale donnée dans l'Eq. 11 devient :

$$1 - P_F = \exp \left[-\frac{V}{2(m+1)^2 V_0} \left(\frac{\sigma_F}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (18)$$

En en prenant deux fois le logarithme népérien, on arrive à

$$\ln[-\ln(1 - P_F)] = m \ln \sigma_F + \ln \left[\frac{V}{2(m+1)^2 V_0 \sigma_0^m} \right] \quad (19)$$

- Calculez P_F et $\ln[-\ln(1-P_F)]$ pour chaque éprouvette en utilisant l'Eq. 17.
- Tracez sur un graphie $\ln[-\ln(1-P_F)]$ en fonction de $\ln(\sigma_F)$. Vous devriez obtenir une droite.
- Identifiez les paramètres de Weibull, i.e. le module de Weibull m et le facteur d'échelle $\sigma_0 V_0^{1/m}$
- Quelles sont vos conclusions sur l'état du matériau étudié ? Développez.

5. Bibliographie

D.R. Askeland, P.P. Fulay, W.J. Wright, *The Science and Engineering of Materials*, 6th Ed., Cengage Learning, Stamford, USA, 2010

S. Grange, J.-L. Prensier, *Le modèle de Weibull : Un critère de rupture probabiliste*, ENS Cachan - Université Paris-Saclay, Paris, France, 2006

S. Grange, J.-L. Prensier, *Annexe : Détermination des paramètres de Weibull*, ENS Cachan - Université Paris-Saclay, Paris, France, 2006

R. Jain, *Effective area and effective volume calculations for ceramic tests specimens*, PhD thesis, Cleveland State University, Cleveland, USA, 2008

Annexe

La répartition des contraintes dans une éprouvette en flexion trois-points est :

$$\sigma(x, y) = \frac{6Fxy}{wh^3} \quad (\text{A.1})$$

avec F le chargement, L la distance entre les deux appuis inférieurs, w la largeur de l'échantillon, et h sa hauteur. Les axes (x,y,z) sont définis comme sur la Fig. 4 avec une origine située au centre de l'échantillon (à la limite en zone de compression et zone de tension) au niveau du premier plateau. En combinant Eq. A.1 avec σ_{flexion} la résistance à la flexion (Eq. 13), la répartition des contraintes peut être réécrite comme suit :

$$\sigma(x, y) = \frac{4xy}{Lh} \sigma_F \quad (\text{A.2})$$

Avec L la distance entre les deux appuis inférieurs.

La définition générale du volume effectif V_{eff} est la suivante :

$$V_{\text{eff}} = \int \left(\frac{\langle \sigma \rangle}{\sigma_F} \right)^m dV \quad (\text{A.3})$$

avec $\langle \sigma \rangle$ la valeur positive de la contrainte et σ_F la contrainte à rupture. Il convient donc de l'intégrer. Pour cela, quelques hypothèses simplificatrices doivent être faites : Seule la moitié inférieure en tension est considérée (de 0 à h/2 sur l'axe y) et les contraintes de cisaillement sont négligées. De plus, comme l'éprouvette est symétrique, il n'est nécessaire de n'intégrer que sur sa moitié gauche (de 0 à L/2 sur l'axe x). La contrainte ne variant pas sur l'axe z, la valeur de son intégrale est donc simplement w.

$$V_{\text{eff}} = 2 \int_0^w \int_0^{L/2} \int_0^{h/2} \left[\frac{\sigma(x, y)}{\sigma_F} \right]^m dx dy dz = 2w \int_0^{L/2} \int_0^{h/2} \left[\frac{4xy \sigma_F}{Lh \sigma_F} \right]^m dx dy \quad (\text{A.4})$$

$$V_{\text{eff}} = 2w \left(\frac{4}{Lh} \right)^m \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^{L/2} \left[\frac{y^{m+1}}{m+1} \right]_0^{h/2} \quad (\text{A.5})$$

$$V_{\text{eff}} = Lhw \frac{1}{2(m+1)^2} = V_{\text{ep}} \frac{1}{2(m+1)^2} \quad (\text{A.6})$$

avec $V_{\text{ep}} = Lhw$, le volume total de l'éprouvette.